GEOMETRÍA ANALÍTICA

En este tema vamos a estudiar los siguientes apartados

- Relaciones analíticas entre puntos alineados:

  Punto medio de un segmento. Simétrico de un punto respecto a otro. Alineación de puntos. Cálculo de la distancia entre dos puntos.

- Ecuaciones de rectas:

  Ecuaciones de rectas bajo un punto de vista geométrico. Forma general de la ecuación de una recta. Resolución de problemas de incidencia (¿pertenece un punto a una recta?), intersección (punto de corte de dos rectas), paralelismo y perpendicularidad.

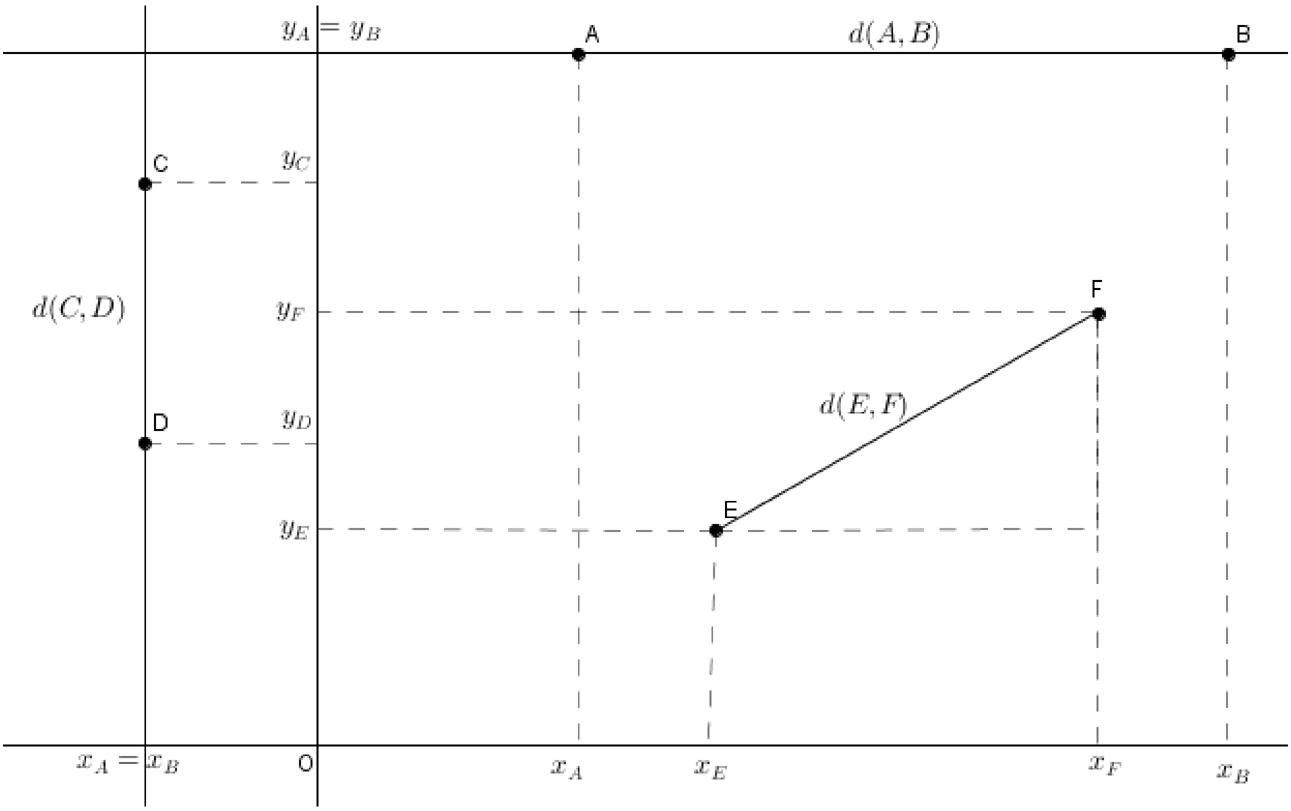
- Ecuación de una circunferencia:

  Obtención de la ecuación de una circunferencia a partir de su centro y su radio. Identificación del centro y del radio de una circunferencia dada por su ecuación: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

- Regiones en el plano:

  Identificación de regiones planas a partir de sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



Si dos puntos A y B tienen la misma ordenada, se encuentran sobre una recta horizontal. Para hallar la distancia, basta con hallar la distancia entre las abscisas.

Si dos puntos C y D tienen la misma abscisa, se encuentran sobre una recta vertical. Para hallar la distancia, basta con hallar la distancia entre las ordenadas.

En general la distancia entre dos puntos E y F se reduce a hallar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $(x_F - x_E)$ y $(y_F - y_E)$.

$$d(E,F) = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$$

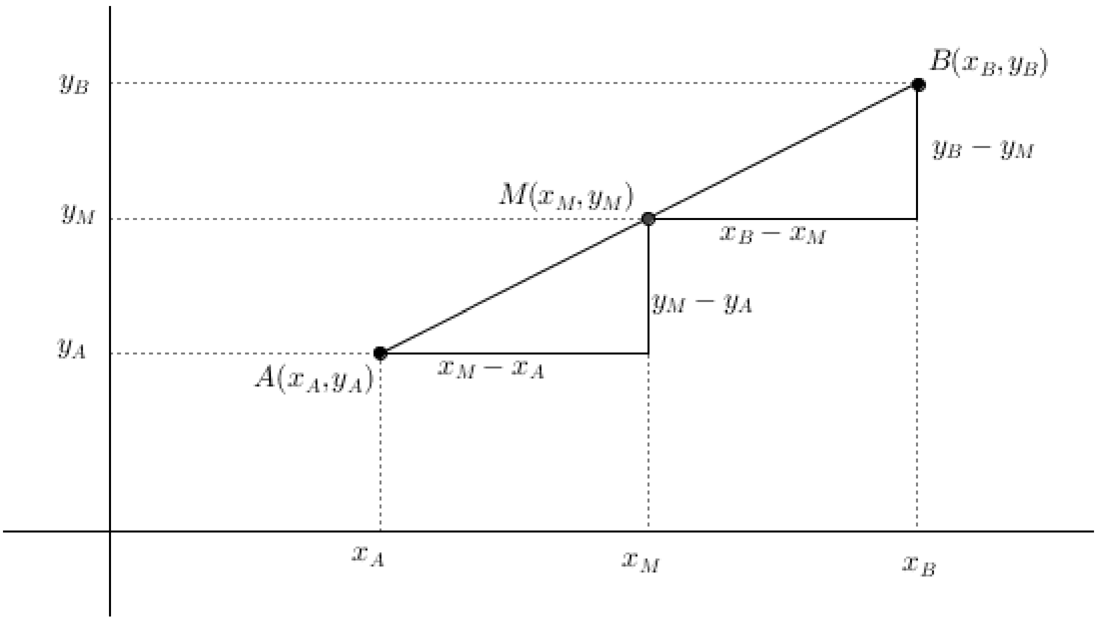
Ejercicio 1

Halla la distancia entre los puntos $A(3,-7)$ y $B(8,5)$.

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

El punto medio de un segmento $\overline{AB}$ es el punto que se encuentra a la misma distancia de cada uno de los extremos A y B del segmento.

Dados los puntos $A(x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$, queremos calcular las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$ $\quad M(x_M, y_M) = P_m(A,B)$



Si M es el punto medio del segmento, los triángulos que se han formado son iguales, entonces tiene que ser $\begin{cases} x_M - x_A = x_B - x_M \\ y_M - y_A = y_B - y_M \end{cases} \Rightarrow$ y de aquí obtenemos que $\begin{cases} 2x_M = x_A + x_B \\ 2y_M = y_A + y_B \end{cases} \Rightarrow$

$$\boxed{M(x_M, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}.$$

Es decir, las coordenadas del punto medio de un segmento, son la semisuma de las coordenadas de los puntos extremos del segmento.

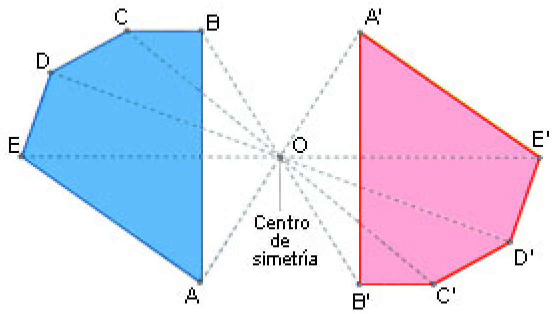
Ejercicio 2

Halla las coordenadas del punto medio del segmento de extremos *A*(-2, 3) y *B*(1, 2).

SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO A OTRO

Dos puntos A y A' son simétricos respecto del centro de simetría O cuando O es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

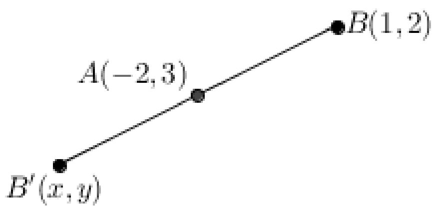
La simetría respecto de un punto se llama simetría central y los puntos correspondientes, homólogos.



Ejercicio resuelto:

Halla el simétrico del punto *B*(1, 2) con respecto a *A*(-2, 3).

El simétrico del punto *B* respecto a *A*, es otro punto *B'* cuyas coordenadas *x* e *y* las calculamos sabiendo que *A* es el punto medio del segmento $\overline{BB'}$. Es decir, las coordenadas de *A* son la semisuma de las coordenadas de *B* y de *B*'.



$$\begin{cases} -2 = \dfrac{1+x}{2} \\ 3 = \dfrac{2+y}{2} \end{cases}$$

Despejando obtenemos que $x=-5$ e $y=4$. <u>El simétrico de *B* es *B'*(-5, 4)</u>

Ejercicio 3

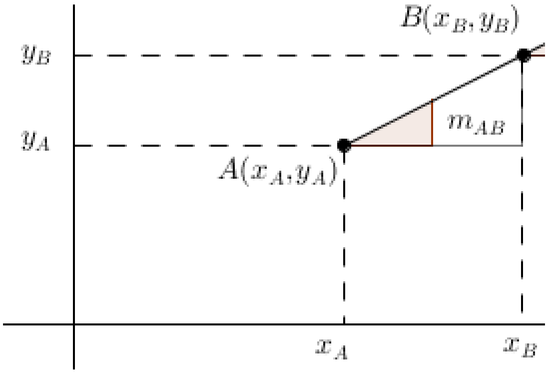
Calcula las coordenadas del punto medio, *M*, del segmento $\overline{AB}$ en los casos siguientes. Comprueba que $d(A,B)=2\cdot d(A,M)$. Halla el simétrico de *B* respecto de *A*.

a) *A*(-3,5) y *B*(5,3)	b) *A*(-4,-6) y *B*(-2,4)
M(,)	*M*(,)
$d(A,B)=2\cdot d(A,M)$	$d(A,B)=2\cdot d(A,M)$

B'(,)	*B'*(,)

PENDIENTE DE UN SEGMENTO

Cuanto mayor es el ángulo que forma un segmento (recta) con la horizontal, mayor es la pendiente. La tangente trigonométrica de este ángulo nos va a proporcionar el valor de la pendiente del segmento $\overline{AB}$.



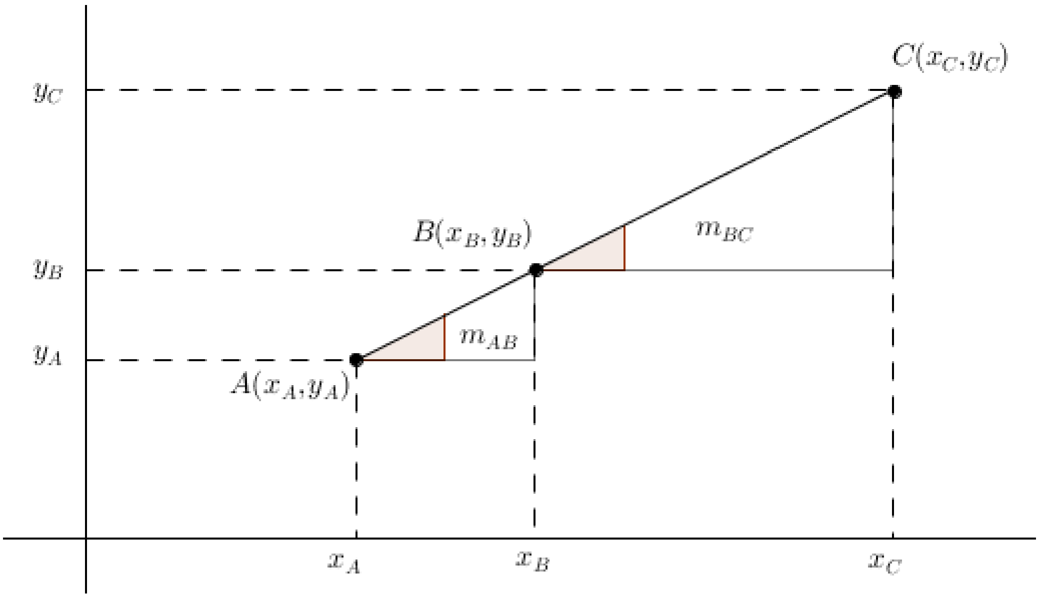
$$\boxed{m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Ejercicio 4

Halla la pendiente del segmento de extremos *A*(-2, 3) y *B*(1, 2).

ALINEACIÓN DE PUNTOS

Tres puntos están alineados cuando se encuentran sobre la misma recta. Los triángulos que se forman son semejantes y la pendiente de cualquier segmento sobre la recta será siempre la misma.



$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

Ejercicio resuelto:

Comprobar si los puntos están alineados:

a) $A(2,-1);\quad B(6,1)\ \text{ y }\ C(8,2)$

¿$m_{AB} = m_{BC}$? $\quad m_{AB} = \dfrac{1-(-1)}{6-2} = \dfrac{2}{4},\quad m_{BC} = \dfrac{2-1}{8-6} = \dfrac{1}{2};\quad \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ Los puntos están alineados.

b) $A(-3,-3);\quad B(6,5)\ \text{ y }\ C(8,7)$

¿$m_{AB} = m_{BC}$? $\quad m_{AB} = \dfrac{5-(-3)}{6-(-3)} = \dfrac{8}{9},\quad m_{BC} = \dfrac{7-5}{8-6} = \dfrac{2}{2};\quad \dfrac{8}{9} \neq 1$ Los puntos no están alineados.

Ejercicio 5

a) Comprobar si los puntos están alineados:

$A(2,3);\quad B(3,5)\ \text{ y }\ C(-2,-5)$	$A(2,3);\quad B(3,7)\ \text{ y }\ C(-2,-3)$

b) Averigua el valor de “*a*” para que los puntos estén alineados:

$R(2,7);\quad S(5,-1)\ \ y\ \ Q(a,25)$	$A(1,2);\quad B(7,-11)\ \text{ y }\ C(a,2a)$

Ejercicio 6

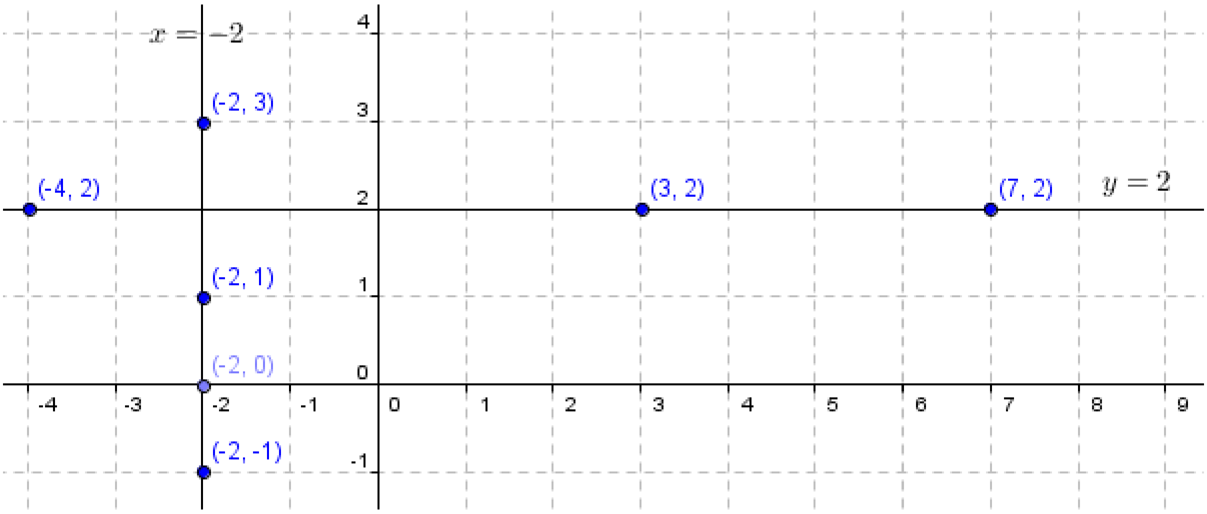
Calcula el perímetro y los puntos medios del triángulo de vértices $A(2,3);\quad B(3,7)\ \text{ y }\ C(-2,-3)$

ECUACIONES DE RECTAS

Rectas paralelas a los ejes:

Todos los puntos de una recta paralela al eje y (recta vertical) tienen la misma abscisa. Por ejemplo (-2,-3), (-2,-1), (-2,0), (-2,3), ……. La ecuación de la recta es $x=-2$

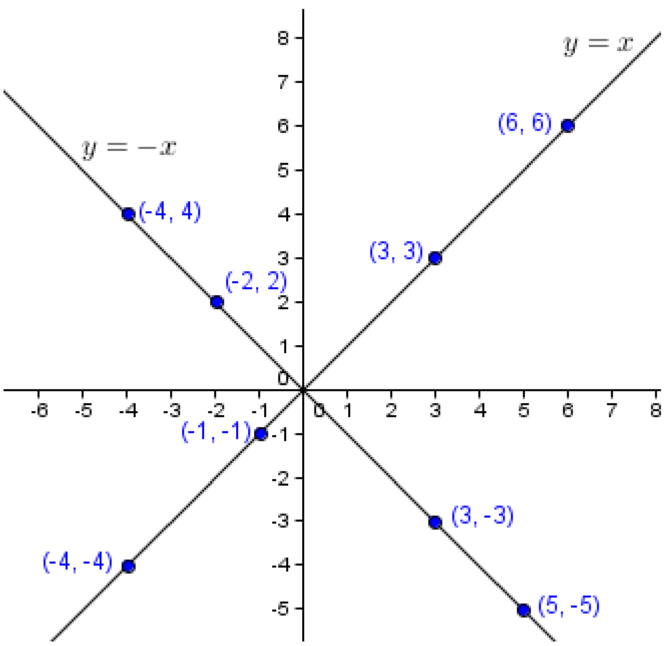
La representación gráfica de todos los puntos del plano que cumplen la condición $\boxed{x=k \text{ es una recta vertical}}$.



Todos los puntos de una recta paralela al eje x (recta horizontal) tienen la misma ordenada. Por ejemplo (-4,2), (0,2), (3,2), (7,2), ……. La ecuación de la recta es $y=2$

La representación gráfica de todos los puntos del plano que cumplen la condición $\boxed{y=n \text{ es una recta horizontal}}$. La pendiente de las rectas horizontales es cero.

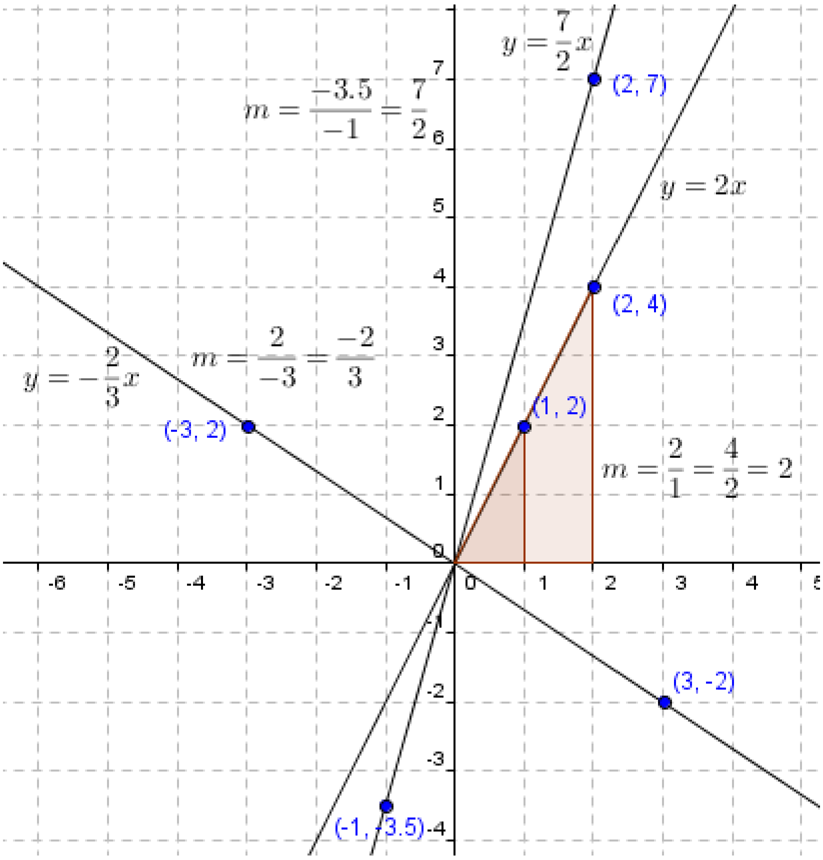
Bisectrices de los cuadrantes:



Todos los puntos situados sobre la bisectriz del primer y tercer cuadrante se caracterizan por tener sus dos coordenadas iguales es decir que $\boxed{y=x}$.

Todos los puntos situados sobre la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante se caracterizan por tener sus dos coordenadas opuestas es decir que $\boxed{y=-x}$.

Rectas que pasan por el origen:



Las coordenadas de todos los puntos de una recta que pasa por el origen de coordenadas cumplen que $\frac{y}{x} = m$.

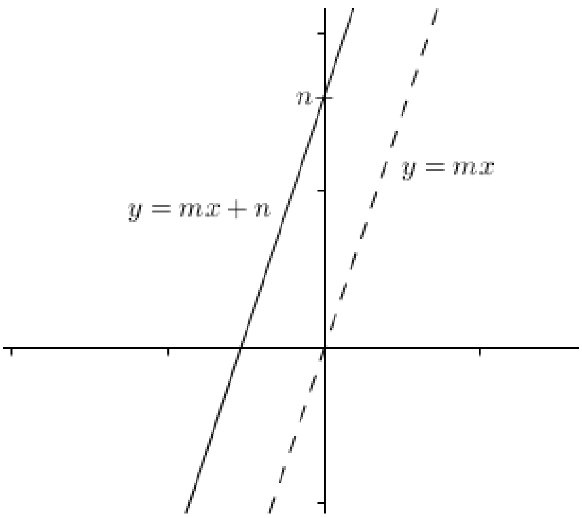
(Las variables x e y son directamente proporcionales).

Como ya sabemos, y como se ve en la figura, *m*, la pendiente de la recta, coincide con la tangente del ángulo que forma la recta con el eje *x*.

Cuanto mayor es la inclinación de la recta, mayor es el ángulo, mayor es la tangente del ángulo y en consecuencia la pendiente *m* es mayor. Si la recta es creciente la pendiente es positiva. Si la recta es decreciente la pendiente es negativa.

La ecuación de una recta que pasa por el origen es de la forma $\boxed{y = mx}$

Ecuación explicita de la recta:



La ecuación $\boxed{y = mx + n}$ es la ecuación explicita de la recta (la *y* está despejada).

m es la pendiente de la recta

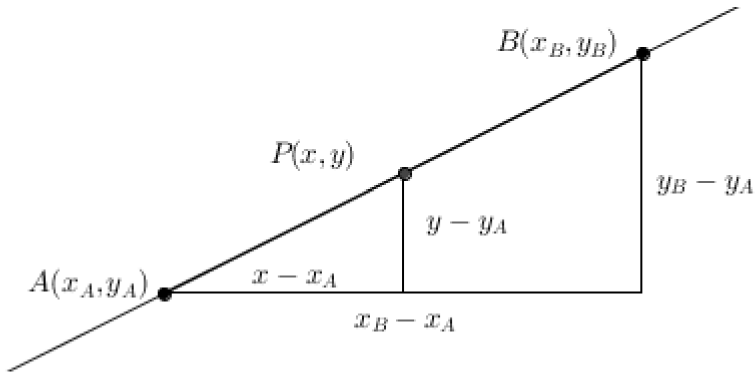
n (ordenada en el origen) nos indica por qué punto del eje *y* pasa la recta.

Esta recta es paralela a la recta $y = mx$ que pasa por el origen. Las dos tienen la misma pendiente.

Ejercicio resuelto:

Halla la ecuación de la recta que es paralela a la recta $y = -2x$ y pasa por el punto (0,3) $\Rightarrow n = 3$ $y = -2x + 3$

Ecuación de la recta conocidos dos puntos:



Un punto *P* pertenece a la recta determinada por *A* y *B* si está alineado con ellos.

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\boxed{y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A)}$$

Ejercicio 7

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(-3,4)$; $B(5,-1)$

b) $C(5,-1)$; $D(5,7)$

c) $E(2,6)$; $F(-3,6)$

Ecuación de la recta punto-pendiente (conocida la pendiente y un punto):

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$ es la pendiente de la recta $\Rightarrow$ $\boxed{y - y_A = m \cdot (x - x_A)}$

Ejercicio resuelto:

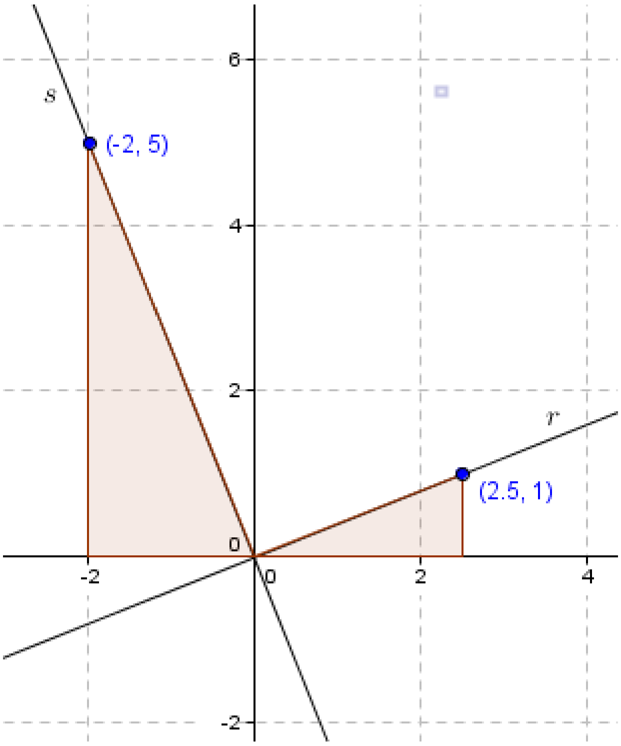
Halla la ecuación de la recta de pendiente 2 y pasa por el punto (1,-3) $y + 3 = 2 \cdot (x - 1)$

Ecuación general de la recta:

Cualquier recta se puede expresar por la ecuación general $\boxed{Ax + By + C = 0}$

Si despejamos y, tenemos $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, es decir la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$ y el punto de corte con el eje *y* es $n = -\frac{C}{B}$

Rectas perpendiculares:



Los dos triángulos son semejantes, sus lados son perpendiculares dos a dos. Es decir las rectas *r* y *s* son perpendiculares.

¿Qué relación existe entre las pendientes de las rectas?

La pendiente de la recta *r* es $m_r = \frac{1}{2,5}$

La pendiente de la recta *s* es $m_s = -\frac{5}{2}$

$$m_s = -\frac{5}{2} = -2,5 == -\frac{1}{\frac{1}{2,5}} = -\frac{1}{m_r}$$

La relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares es $\boxed{m_s = -\frac{1}{m_r}}$

Si sabemos que la pendiente de una recta es $\frac{3}{5}$, cualquier recta perpendicular a ella tiene por pendiente $-\frac{5}{3}$.

Si tenemos la ecuación general de una recta $r \equiv Ax + By + C = 0$, su pendiente es $m_r = -\frac{A}{B}$. La pendiente de una recta *s* perpendicular a *r* será $m_s = \frac{B}{A}$ y su ecuación será $s \equiv Bx - Ay + D = 0$. Los coeficientes de *x* e *y* se permutan y cambia el signo de uno de ellos.

Ejercicio 8

Halla la ecuación de la recta perpendicular a:

a) la recta $y = -2x + 1$ que pasa por el punto (3,2).

b) la recta $3x - 2y + 1 = 0$ que pasa por (-1,2)

Posición relativa de dos rectas:

Tenemos dos rectas $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$. Pretendemos saber si estas rectas son secantes o paralelas.

Necesitamos averiguar si existe algún punto que pertenece a las dos rectas, de existir, tiene que cumplir la ecuación de *r* y la de *s*. Para ello formamos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$.

Antes de resolver este sistema podemos saber, gracias a las pendientes de las rectas, si se cortan o son paralelas, ¿cómo?

La pendiente de *r* es $m_r = -\dfrac{A}{B}$ y la pendiente de *s* es $m_s = -\dfrac{A'}{B'}$.

Si las pendientes son iguales $-\dfrac{A}{B} = -\dfrac{A'}{B'}$ podemos decir que $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'}$

Si los puntos de corte con el eje *y* son iguales $-\dfrac{C}{B} = -\dfrac{C'}{B'}$ podemos decir que $\dfrac{C}{C'} = \dfrac{B}{B'}$

Así pues, podemos considerar las razones entre los coeficientes.

- Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$ las rectas tienen distinta pendiente $\Rightarrow$ son secantes. Se cortan en un punto cuyas coordenadas son la solución del sistema.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'}$ las rectas tienen la misma pendiente $\Rightarrow$ son paralelas o coincidentes.
    - Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$ son rectas paralelas ya que cortan al eje *y* a distinta altura. No tienen ningún punto en común. El sistema no tiene solución.
    - Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$ son rectas coincidentes ya que cortan al eje *y* a la misma altura. El sistema tiene infinitas soluciones. Todos los puntos de la recta.

Ejercicio 9

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{matrix} r \equiv 3x - 8y + 1 = 0 \\ s \equiv 4x - 8y - 2 = 0 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} r \equiv 3x - 15y = 1 \\ s \equiv -2x + 10y = 0 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} r \equiv -6x - 2y = 8 \\ s \equiv 9x + 3y = -12 \end{matrix}$

Ejercicio 10

Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas, en el caso de ser secantes, da el punto de corte:

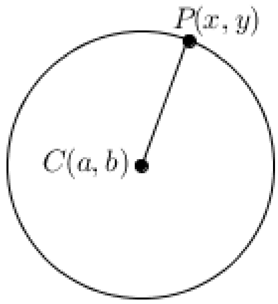
a) $r \equiv 8x + y - 14 = 0$, $s \equiv 5x - y - 20 = 0$

b) $r \equiv 3x - 2y - 28 = 0$, $s \equiv$ pasa por (8, -2) y por (10, 1)

c) $r \equiv$ pasa por (-1, 4) y (7, -2), $s \equiv$ perpendicular a $4x - 3y + 1 = 0$ que pasa por el origen de coordenadas.

d) $r \equiv$ bisectriz del primer y tercer cuadrante, $s \equiv x - y + 5 = 0$

Ecuación de una circunferencia:



La condición que cumplen todos los puntos de la circunferencia es que su distancia al centro es el radio.

Un punto cualquiera P de la circunferencia tiene que cumplir $d(C,P)=r$. Es decir: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

Elevando al cuadrado.

$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$ ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Ejercicio resuelto:

a) Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto (-2, 1) y radio $\sqrt{3}$.

$$(x+2)^2+(y-1)^2=3$$

b) Di el radio y centro de la circunferencia $(x-4)^2+(y+2)^2=16$.

El centro es el punto (4, -2) y el radio 4

c) ¿El punto (2, -1) pertenece a la circunferencia del apartado anterior?

Para que el punto pertenezca a la circunferencia debe cumplir su ecuación.

$(2-4)^2+(-1+2)^2=16 \Rightarrow 4+1\neq 16$ La circunferencia no pasa por este punto.

d) Escribe la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C(-4, 1) y que pasa por el punto P(2, -5).

Si pasa por P la distancia del centro a este punto coincide con el valor del radio.

$d(C,P)=\sqrt{(2+4)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{36+36}=$ $\boxed{\sqrt{72}=r}$ y la ecuación de la circunferencia es $(x+4)^2+(y-1)^2=72$

Ejercicio 11

Sea la circunferencia de ecuación $(x+2)^2+(y-1)^2=3$.

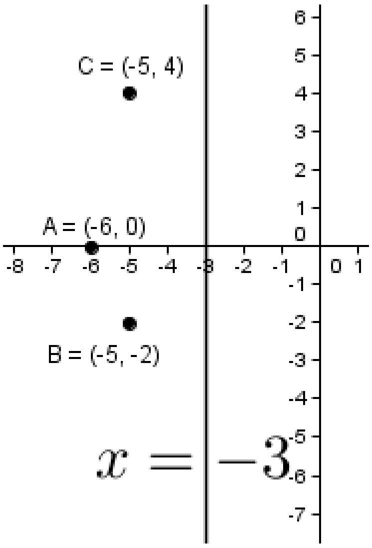
a) Di cuál es su centro y radio

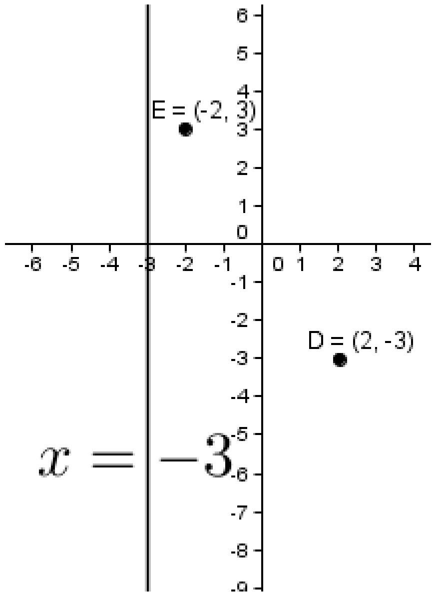
b) Escribe la ecuación de otra circunferencia concéntrica con esta y de radio 3

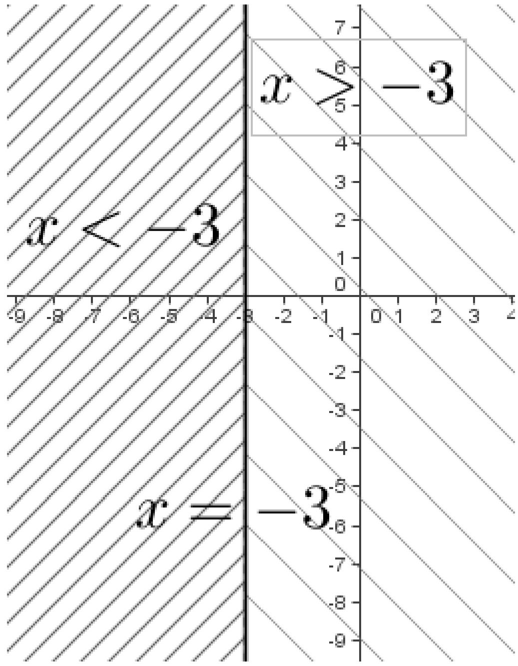
c) Escribe la ecuación de otra circunferencia concéntrica con esta y que pase por el punto (1, 5).

Regiones en el plano:

a) La recta vertical $x = -3$ divide al plano en dos regiones:

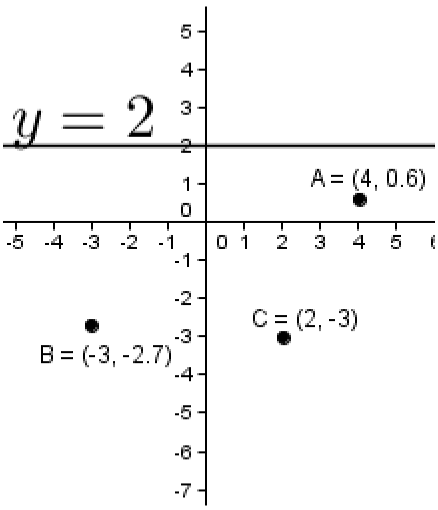


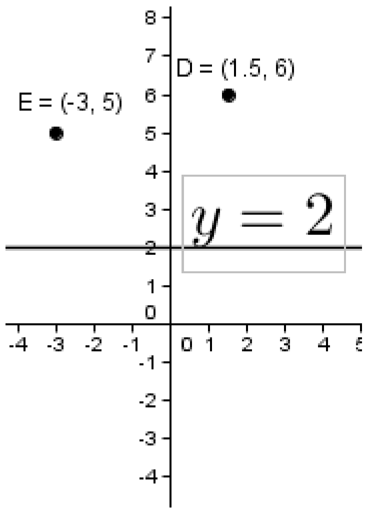


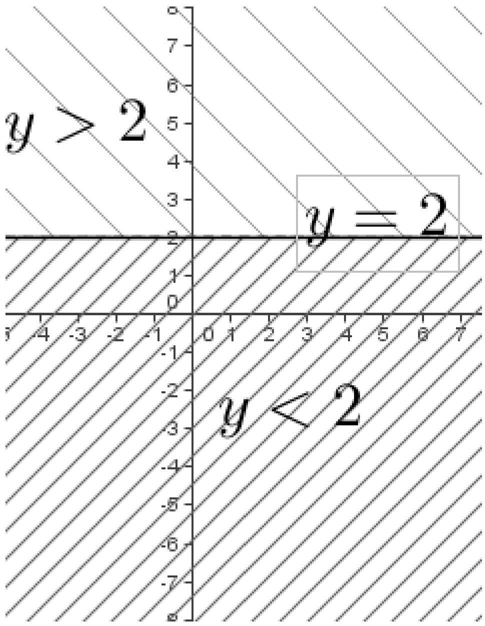


- En la región de la izquierda de la recta $x = -3$, la abscisa *x* de cualquier punto es menor que -3, como se observa en los puntos A, B y C.
- En la región de la derecha de la recta, la abscisa *x* de cualquier punto es mayor que -3, como se observa en los puntos D y E.

b) La recta horizontal $y = 2$ divide al plano en dos regiones:

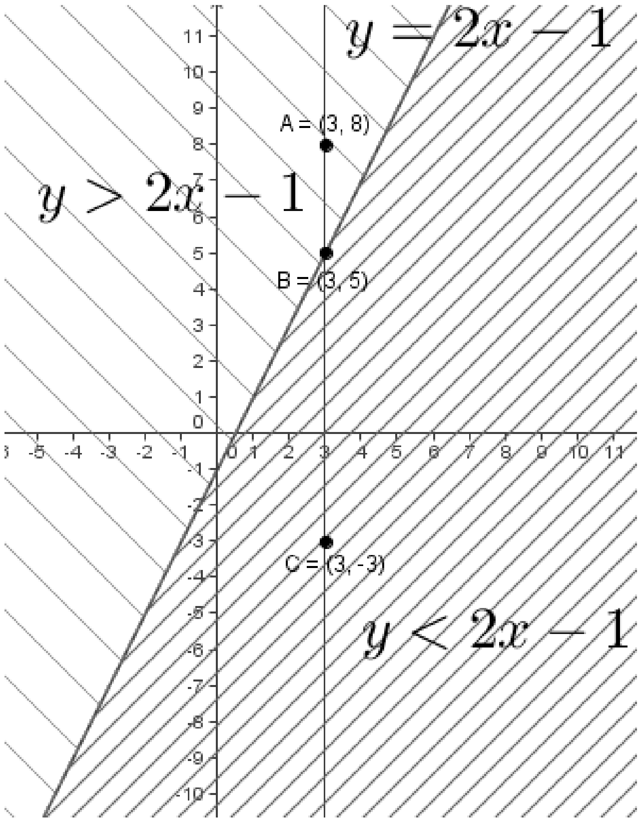






- En la región inferior de la recta, la ordenada *y* de cualquier punto es menor que 2, como se observa en los puntos A, B y C.
- En la región superior de la recta, la ordenada *y* de cualquier punto es mayor que 2, como se observa en los puntos D y E.

c) La recta $y = 2x - 1$ divide al plano en dos regiones:



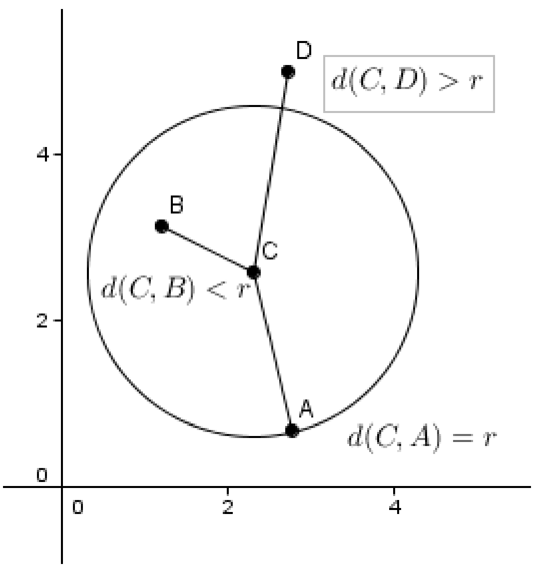
- Nos fijamos en los puntos A y B. A es un punto que está por encima del punto B de la recta, en la misma vertical. Es decir las abscisas *x* son iguales, valen 3, pero la *y* del punto A es mayor que la del punto B. $8 > 2 \cdot 3 - 1 = 5$
- Nos fijamos en los puntos C y B. C es un punto que está por debajo del punto B de la recta, en la misma vertical. Es decir las abscisas *x* son iguales, valen 3, pero la *y* del punto A es menor que la del punto B. $-3 < 2 \cdot 3 - 1 = 5$

Es decir: todos los *puntos de la región superior* cumplen que su *ordenada y es mayor que* $2x - 1$ y todos los *puntos de la región inferior* cumplen que su *ordenada y es menor que* $2x - 1$

d) La circunferencia divide al plano en dos regiones.

Una región con los puntos interiores, en la que la distancia de cualquier punto al centro de la circunferencia es menor que el radio.

Otra región con los puntos exteriores, en la que la distancia de cualquier punto al centro de la circunferencia es menor que el radio.



- Los puntos que están sobre la circunferencia cumplen la ecuación, es decir: $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$
- Los puntos que están en el interior cumplen la desigualdad $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 < r^2$
- Los puntos que están en el exterior cumplen la desigualdad $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 > r^2$

CONCLUSIÓN:

Vamos a resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones con dos incógnitas mediante la representación gráfica.

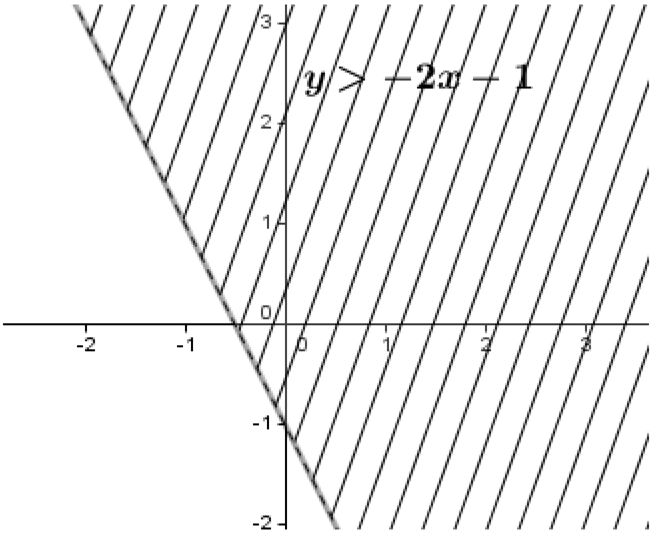
Si está *y* elevado a la unidad, despejamos en primer lugar.

Ejercicios resueltos:

Resolver:

a) $y > -2x - 1$

Dibujamos la recta $y = -2x - 1$. La solución de la inecuación es el conjunto de todos los puntos del semiplano superior, sin incluir los puntos de la recta ya que no puede ser igual (la recta la dibujamos con trazo discontinuo).

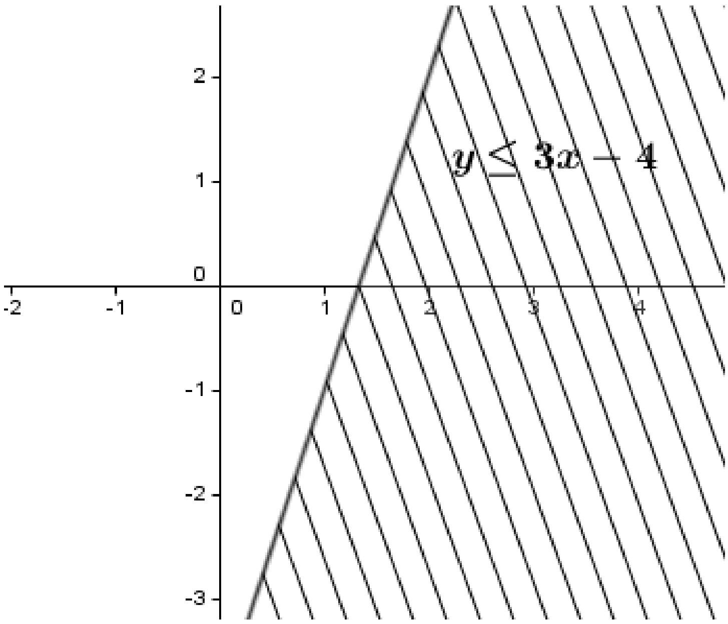


b) $3x - y \geq 4$

- En primer lugar despejamos *y*: $y \leq 3x - 4$

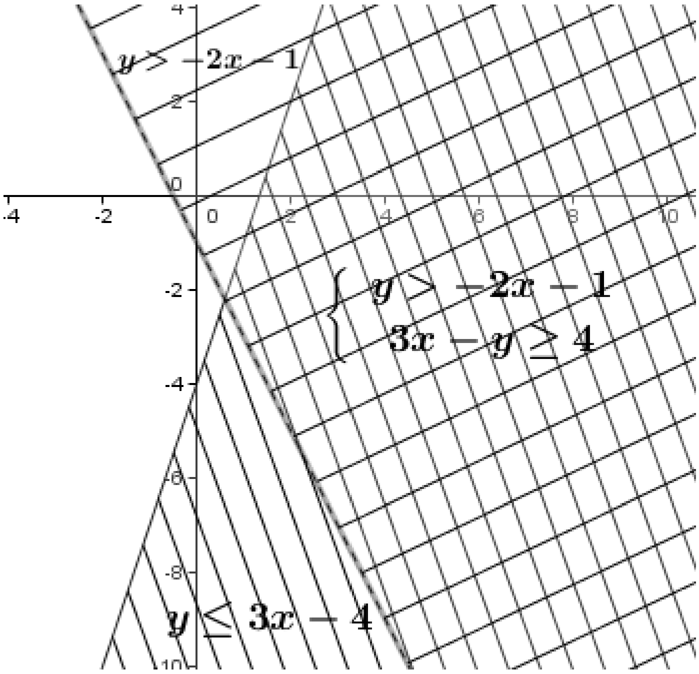
- Dibujamos la recta $y = 3x - 4$

- Como en este caso tenemos también el igual, dibujamos la recta con trazo continuo ya que los puntos de la recta también son soluciones.



c) $\begin{cases} y > -2x-1 \\ 3x-y \geq 4 \end{cases}$

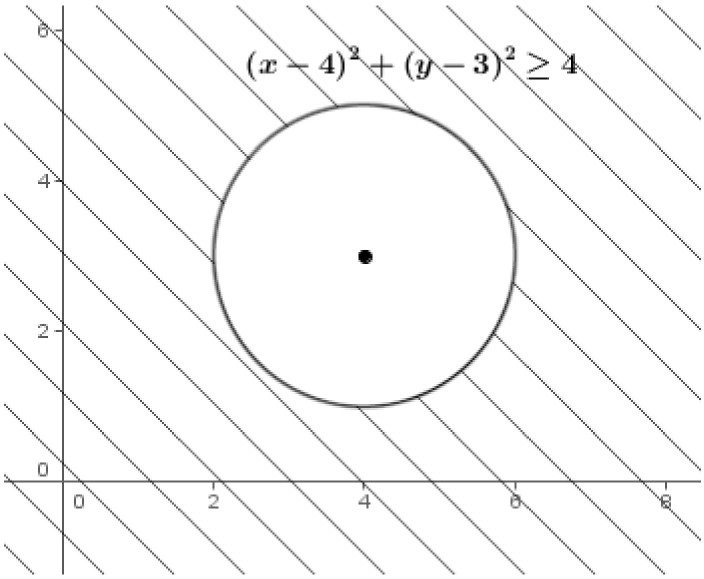
Para resolver un sistema, se representan, en este caso, las dos rectas y se dibuja la región solución de cada una de ellas. La solución del sistema es la intersección de las dos regiones.



d) $(x-4)^2 + (y-3)^2 \geq 4$

En este caso no despejamos *y*, ya que está elevada al cuadrado. Se trata de una circunferencia de centro el punto (4, 3) y radio 2.

La solución de esta inecuación es el conjunto de todos los puntos que están sobre la circunferencia (cumplen la igualdad) y todos los puntos exteriores a ella (cumplen la desigualdad).



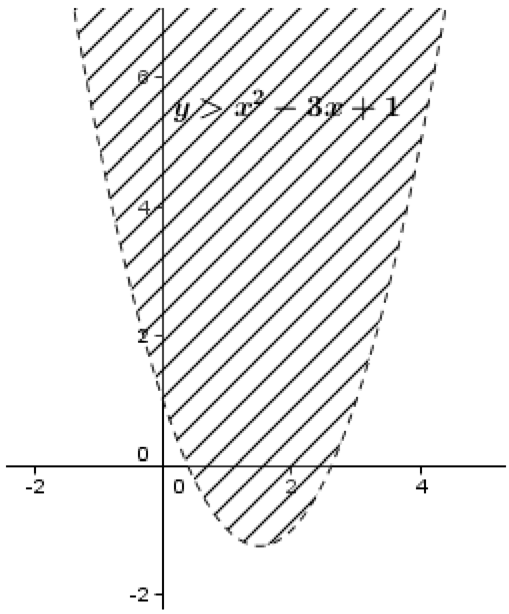
e) $y + 3x - 1 > x^2$

De forma análoga resolvemos esta inecuación.

- Despejamos *y*

- Representamos la parábola

- La solución es la región superior, sin incluir los puntos de la parábola ya que la desigualdad es mayor estricto que y no está incluida la posibilidad de que sea igual.



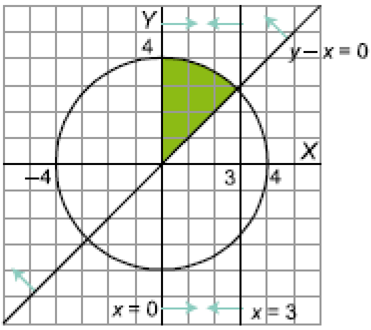
Ejercicio 12

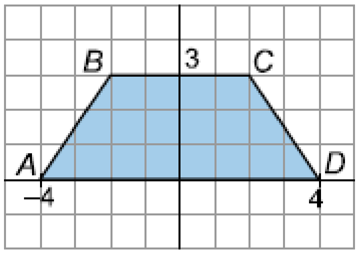
Representa gráficamente los siguientes recintos:

a) $\begin{cases} -1 \le x \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y \le 0 \\ x \le 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 2y \ge -10 \\ -5 \le y \le 0 \\ x \le 0 \end{cases}$

Ejercicio 13

Describe mediante un sistema de inecuaciones cada uno de los siguientes recintos:





Ejercicio 14

En el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(-3, 2)$ y $C(-1,-4)$ halla:

a) La ecuación (de la recta que contiene al) del lado a, b y c.

b) La ecuación de la altura que parte de B.

c) La ecuación de la mediatriz del lado a.

d) La ecuación de la mediana de c.

e) Área del triángulo.

Ejercicio 15

Comprueba que el cuadrilátero de vértices $A(3, 3)$, $B(6, 0)$, $C(4,-4)$ y $D(0,0)$ es un trapecio rectángulo y halla su área.